Ajustamento de observações

A generalidade das variáveis observadas em topografia (direcções, distâncias, desníveis, etc.) são variáveis aleatórias que devido a flutuações probabilisticas (classicamente conhecidas como erros) tomariam valores diferentes se as observações fossem repetidas. No caso de existir uma única observação para cada variável com interesse para o problema em questão, obtêm-se estimativas para as incógnitas que são consistentes com o modelo utilizado, não se justificando o ajustamento das observações. Se, pelo contrário, existirem mais observações do que aquelas estritamente necessárias para resolver univocamente o modelo, é necessário efectuar um ajustamento de forma a garantir estimativas consistentes (neste último caso, combinações diferentes de observações conduzem a estimativas diferentes para as incógnitas, isto é, inconsistência nos resultados).

Antes da realização do trabalho de campo, é necessário definir o modelo matemático a utilizar, determinado através de um dado número de variáveis e da relação entre essas variáveis. O modelo matemático, por sua vez, tem duas componentes: o modelo funcional e o modelo estocástico. O modelo funcional é a componente mais óbvia, pois descreve as características geométricas do problema, enquanto que o modelo estocástico descreve as propriedades estatísticas dos elementos envolvidos no modelo funcional. Pode acontecer o modelo funcional ser apropriado mas o(s) aparelho(s) utilizado(s) para efectuar as observações não garantir(em) precisão suficiente, assim como também pode acontecer o(s) aparelho(s) utilizado(s) ser(em) adequado(s) mas a geometria seleccionada não ser suficientemente sólida. Deve portanto existir uma relação estreita entre os modelos funcional e estocástico de forma a serem obtidos os resultados pretendidos, o que pode ser previsto através de uma simulação.

O número mínimo de variáveis independentes necessárias para resolver univocamente o modelo funcional designa-se por n_0; caso sejam efectuadas $n > n_0$ observações, existe uma redundância $r = n - n_0$ de observações (ou r graus de liberdade). Após a redundância ter sido determinada, o ajustamente continua com a formulação das equações (de condição) que relacionam as variáveis do modelo, reflectindo a redundância existente. O número de equações de condição para um dado problema depende de estas equações apenas envolverem observações ou, adicionalmente, outras variáveis desconhecidas, designadas por parâmetros. Após o ajustamento, tanto as observações como os parâmetros terão estimativas por mínimos quadrados dos respectivos valores. Sendo u o número de parâmetros, há $c = r + u$ equações de condição independentes que relacionam as n observações e os u parâmetros. Para que os parâmetros sejam independentes, deve verificar-se $0 \le u \le n_0$ e, de forma similar, para que as equações de condição sejam independentes, deve verificar-se $r \le c \le n$.

Sejam $\vec{\ell}_{n,1}$, $\vec{\upsilon}_{n,1}$ e $\hat{\ell}_{n,1}$ os vectores das observações, dos resíduos e das observações ajustadas, respectivamente, tal que $\hat{\ell}_{n,1} = \vec{\ell}_{n,1} + \vec{\upsilon}_{n,1}$. Sendo $W_{n,n}$ a matriz dos pesos das observações, o critério dos mínimos quadrados consiste na minimização da função $\vec{\upsilon}^T_{1,n} W_{n,n}\, \vec{\upsilon}_{n,1}$. A técnica designada por ajustamento indirecto de observações (no sentido que primeiro se ajustam os parâmetros e só depois as observações) ou ajustamento paramétrico caracteriza-se pelas propriedades seguintes:

1. as equações de condição incluem observações e parâmetros.
2. há tantas equações de condição como o número de observações, isto é, $c = n$.
3. cada equação de condição contém apenas uma observação.

Assim, sendo $\upsilon_{n,1}$ o vector dos resíduos das n observações, $B_{n,u}$ a matriz dos coeficientes dos parâmetros, $\vec{\Delta}_{u,1}$ o vector dos parâmetros e $\vec{f}_{n,1}$ o vector dos termos constantes de cada equação, o conjunto de equações de condição pode representar-se na forma

$$\vec{\upsilon}_{n,1} + B_{n,u}\, \vec{\Delta}_{u,1} = \vec{f}_{n,1}\,.$$

O critério dos mínimos quadrados consiste na minimização de

$$\phi = \vec{\upsilon}^T_{1,n} W_{n,n}\, \vec{\upsilon}_{n,1} = (\vec{f}_{n,1} - B_{n,u}\, \vec{\Delta}_{u,1})^T\, W\, (\vec{f}_{n,1} - B_{n,u}\, \vec{\Delta}_{u,1}) =$$

$$\vec{f}^T_{1,n}\, W_{n,n}\, \vec{f}_{n,1} - \vec{\Delta}^T_{1,u}\, B^T_{u,n}\, W_{n,n}\, \vec{f}_{n,1} - \vec{f}^T_{1,n}\, W_{n,n}\, B_{n,u}\, \vec{\Delta}_{u,1} + \vec{\Delta}^T_{1,u}\, B^T_{u,n}\, W_{n,n}\, B_{n,u}\, \vec{\Delta}_{u,1}\,;$$

como todos estes termos são escalares, tem-se

$$\phi = \vec{f}^T_{1,n}\, W_{n,n}\, \vec{f}_{n,1} - 2\, \vec{f}^T_{1,n}\, W_{n,n}\, B_{n,u}\, \vec{\Delta}_{u,1} + \vec{\Delta}^T_{1,u}\, B^T_{n,n}\, W_{n,n}\, B_{n,n}\,.$$

Para ϕ ser mínimo, então $\partial\phi / \partial\vec{\Delta}$ deve ser nulo, ou seja:

$$-2\, \vec{f}^T_{1,n}\, W_{n,n}\, B_{n,u} + 2\, \vec{\Delta}^T_{1,u}\, B^T_{u,n}\, W_{n,n}\, B_{n,u} = 0$$

ou ainda

$$(B^T_{u,n}\, W_{n,n}\, B_{n,u})\, \vec{\Delta}_{u,1} = B^T_{u,n}\, W_{n,n}\, \vec{f}_{n,1}\ \ .$$

Pondo $N_{u,u} = B^T_{u,n}\, W_{n,n}\, B_{u,n}$ e $\vec{t}_{u,1} = B^T_{u,n}\, W_{n,n}\, \vec{f}_{n,1}$, a expressão anterior reduz-se a

$$N_{u,u}\, \vec{\Delta}_{u,1} = \vec{t}_{u,1}\,,$$

que constitui o sistema de equações normais, cuja solução é dada por

$$\vec{\Delta}_{u,1} = N^{-1}_{u,u}\, \vec{t}_{u,1}\,.$$

A precisão dos parâmetros $\vec{\Delta}_{u,1}$ estimados é dada pela matriz cofactor $Q_{\vec{\Delta}\vec{\Delta}} = N^{-1}$. Uma vez estimado o vector $\vec{\Delta}_{u,1}$, os resíduos obtêm-se de $\upsilon_{n,1} = \vec{f}_{n,1} - B_{n,u}\, \vec{\Delta}_{u,1}$ e as estimativas $\hat{\ell}_{n,1}$ por mínimos quadrados das observações $\vec{\ell}_{n,1}$ são calculadas por $\hat{\ell}_{n,1} = \vec{\ell}_{n,1} + \vec{\upsilon}_{n,1}$, cuja precisão é dada pela matriz $Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = B_{n,u}\, N^{-1}_{u,u}\, B^T_{u,n}$.

Exemplo: sejam ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 três medições não correlacionadas e de igual precisão de uma distância. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados do valor mais provável da distância.

Neste caso, $n = 3$, $n_0 = 1$, $r = n - n_0 = 2$, $u = 1$, $c = r + u = 3$ = número de equações de condição: $0 \le 1 \le 1$, $2 \le 3 \le 3$. Se $\hat{\ell}$ for a estimativa da distância (parâmetro), o sistema de equações de condição tem a forma

$$\begin{cases} \ell_1 + \upsilon_1 = \hat{\ell} \\ \ell_2 + \upsilon_2 = \hat{\ell} \\ \ell_3 + \upsilon_3 = \hat{\ell} \end{cases}$$

ou, colocando os parâmetros e os resíduos (incógnitas) no 1º membros e os termos independentes no 2º,

$$\begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \hat{\ell} = \begin{bmatrix} -\ell_1 \\ -\ell_2 \\ -\ell_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\vec{\upsilon}_{3,1} + B_{3,1}\, \vec{\Delta}_{1,1} = \vec{f}_{3,1}$$

com

$$B_{3,1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \vec{f}_{3,1} = \begin{bmatrix} -\ell_1 \\ -\ell_2 \\ -\ell_3 \end{bmatrix},\ \vec{\Delta}_{1,1} = \hat{\ell}\ .$$

Uma vez que as observações são não correlacionadas e de igual precisão, $W_{3,3} = I_{3,3}$, donde

$$N_{1,1} = B^T_{1,3}\ I_{3,3}\ B_{3,1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3,$$

$$\vec{t}_{1,1} = B^T_{1,3}\ I_{3,3}\ \vec{f}_{3,1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ell_1 \\ -\ell_2 \\ -\ell_3 \end{bmatrix} = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3\,,$$

$$\hat{\ell} = \vec{\Delta}_{1,1} = N^{-1}_{1,1}\ \vec{t}_{1,1} = \frac{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3}{3}\ .$$

Exemplo: os 3 ângulos internos de um triângulo plano são $\ell_1 = 45^o\,25'\;01''$, $\ell_2 = 65^o\,20'\;00''$, $\ell_3 = 69^o\,15'\;02''$. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados dos 3 ângulos supondo que as observações são não correlacionadas e de igual precisão.

Neste caso, $n = 3$ e como num triângulo é suficiente conhecer 2 ângulos internos, $n_0 = 2$, pelo que $r = n - n_0 = 3 - 2 = 1$; o número de parâmetros é $u = 2$, pelo que o número de equações de condição é $c = r + u = 1 + 2 = 3$; sendo $\hat{\ell}_1$ e $\hat{\ell}_2$ os dois parâmetros (ângulos ajustados), as 3 equações de condição são:

$$\begin{cases} \upsilon_1 + \ell_1 = \hat{\ell}_1 \\ \upsilon_2 + \ell_2 = \hat{\ell}_2 \\ \upsilon_3 + \ell_3 = 180^o - (\hat{\ell}_1 + \hat{\ell}_2) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \upsilon_1 - \hat{\ell}_1 = -\ell_1 \\ \upsilon_2 - \hat{\ell}_2 = -\ell_2 \\ \upsilon_3 + \hat{\ell}_1 + \hat{\ell}_2 = 180^o - \ell_3 \end{cases}$$

que, na forma matricial pode ser escrito como $\vec{\upsilon}_{3,1} + B_{3,2}\,\vec{\Delta}_{2,1} = \vec{f}_{3,1}$, com

$$\vec{\upsilon}_{3,1} = \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \end{bmatrix}, \qquad B_{3,2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\Delta}_{2,1} = \begin{bmatrix} \hat{\ell}_1 \\ \hat{\ell}_2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{f}_{3,1} = \begin{bmatrix} -45^o\,25'\;01'' \\ -65^o\,20'\;00'' \\ 110^o\,44'\;58'' \end{bmatrix};$$

como as observações são não correlacionadas e de igual precisão, $W_{3,3} = I_{3,3}$, tendo as equações normais a forma

$(B_{2,3}^T\; I_{3,3}\; B_{3,2})\,\vec{\Delta}_{2,1} = B_{2,3}^T\; I_{3,3}\;\vec{f}_{3,1}$, ou

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\ell}_1 \\ \hat{\ell}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -45^o\,25'\;01'' \\ -65^o\,20'\;00'' \\ 110^o\,44'\;58'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\ell}_1 \\ \hat{\ell}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156.166389^\circ \\ 176.082778^\circ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \hat{\ell}_1 \\ \hat{\ell}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 156.166389^\circ \\ 176.082778^\circ \end{bmatrix}$$

de onde se tem que $\hat{\ell}_1 = 45^\circ\,25'\;00''$, $\hat{\ell}_2 = 65^\circ\,19'\;59''$. Substituindo estes valores nas equações de condição, tem-se:

$$\begin{cases} \upsilon_1 = 45^\circ\,25'\;00'' - 45^\circ\,25'\;01'' = -01'' \\ \upsilon_2 = 65^\circ\,19'\;59'' - 65^\circ\,20'\;00'' = -01'' \\ \upsilon_3 = 180^\circ - (45^\circ\,25'\;00'' + 65^\circ\,19'\;59'' + 69^\circ\,15'\;02'') = -01'' \end{cases}$$

A matriz cofactor $Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$ das observações ajustadas é dada por

$$Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

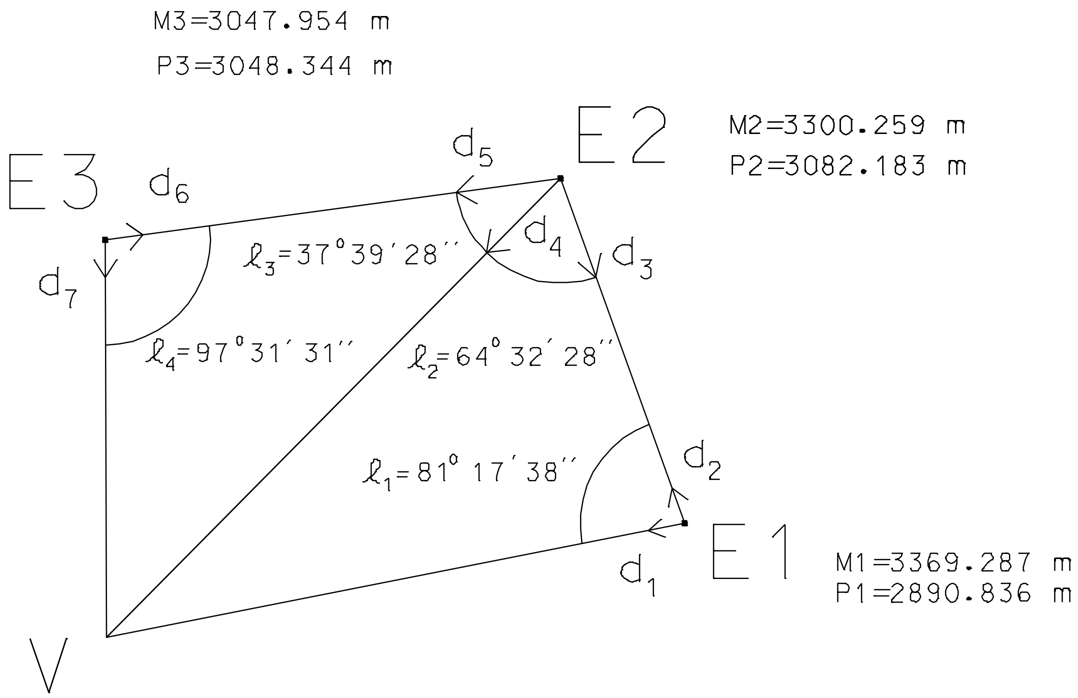
(os elementos da diagonal principal desta matriz são as variâncias de cada observação ajustada e os restantes elementos são as covariâncias entre as observações ajustadas).

Até aqui a discussão do ajustamento por mínimos quadrados baseou-se da suposição de que as equações de condição são lineares. Na prática, muitos problemas são definidos através de equações não lineares nas observações e/ou nos parâmetros. A utilização directa destas equações no ajustamento é complexa e raramente utilizada, recorrendo-se então à linearização das equações de condição através de um desenvolvimento em série de Taylor e à posterior resolução do sistema obtido utilizando um processo iterativo até que o efeito devido à truncagem dos termos de ordem superior a um seja negligenciável.

Seja $\vec{y} = f(\vec{x})$ o sistema de equações de condição não linear em $\vec{x}$, cujo desenvolvimento em série na vizinhança do ponto $\vec{x}_0$ é $\vec{y} = f(\vec{x}_0) + (\frac{\partial f}{\partial \vec{x}})_{x=x_0}(\vec{x} - \vec{x}_0) + (\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2})_{x=x_0}\frac{(\vec{x} - \vec{x}_0)^2}{2} + \cdots$, ou, na forma matricial, $\vec{y} = \vec{y}_0 + J_{yx}(x - x_0)$, onde J_{yx} é a matriz jacobiana contendo as derivadas parciais de $\vec{y}$ em relação a $\vec{x}$.

Intersecção directa

Exemplo: A figura seguinte indica as observações de direcção efectuadas, tendo em vista a obtenção dos ângulos utilizados na coordenação do ponto V por intersecção directa a partir dos pontos E1, E2 e E3, cujas coordenadas também estão indicadas. Supondo que o desvio padrão das observações de direcção é igual a 2’’, efectue a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas do ponto V.



Neste caso tem-se $n = 4$ (número de ângulos observados), $n_0 = 2$ (número mínimo de ângulos para calcular uma intersecção directa), $r = n - n_0 = 2$, $u = 2$ (número de parâmetros desconhecidos: M_V, P_V), $c = r + u = 4$ (número de equações de condição que relacionam os ângulos observados e os parâmetros). As equações de condição são então

$$\begin{cases}
\ell_1 + \upsilon_1 - R_{E1,E2} + R_{E1,V} = 0 \Leftrightarrow \ell_1 + \upsilon_1 - a\tan\dfrac{M_{E2} - M_{E1}}{P_{E2} - P_{E1}} + a\tan\dfrac{M_V - M_{E1}}{P_V - P_{E1}} = 0 \Leftrightarrow \upsilon_1 + F_1(M_V, P_V) = -\ell_1 \Leftrightarrow \upsilon_1 + F_1 = -\ell_1 \\
\ell_2 + \upsilon_2 - R_{E2,V} + R_{E2,E1} = 0 \Leftrightarrow \ell_2 + \upsilon_2 - a\tan\dfrac{M_V - M_{E2}}{P_V - P_{E2}} + a\tan\dfrac{M_{E1} - M_{E2}}{P_{E1} - P_{E2}} = 0 \Leftrightarrow \upsilon_2 + F_2(M_V, P_V) = -\ell_2 \Leftrightarrow \upsilon_2 + F_2 = -\ell_2 \\
\ell_3 + \upsilon_3 - R_{E2,E3} + R_{E2,V} = 0 \Leftrightarrow \ell_3 + \upsilon_3 - a\tan\dfrac{M_{E3} - M_{E2}}{P_{E3} - P_{E2}} + a\tan\dfrac{M_V - M_{E2}}{P_V - P_{E2}} = 0 \Leftrightarrow \upsilon_3 + F_3(M_V, P_V) = -\ell_3 \Leftrightarrow \upsilon_3 + F_3 = -\ell_3 \\
\ell_4 + \upsilon_4 - R_{E3,V} + R_{E3,E2} = 0 \Leftrightarrow \ell_4 + \upsilon_4 - a\tan\dfrac{M_V - M_{E3}}{P_V - P_{E3}} + a\tan\dfrac{M_{E2} - M_{E3}}{P_{E2} - P_{E3}} = 0 \Leftrightarrow \upsilon_4 + F_4(M_V, P_V) = -\ell_4 \Leftarrow \upsilon_4 + F_4 = -\ell_4
\end{cases}$$

Como estas equações são não lineares em M_V e P_V, é necessário efectuar uma linearização para formar um sistema da forma $\vec{\upsilon}_{4,1} + B_{4,2}\,\vec{\Delta}_{2,1} = \vec{f}_{4,1}$; sendo M_V^0 e P_V^0 valores aproximados dos parâmetros a estimar (algum dos valores previamente calculados na intersecção directa sem ajustamento), tem-se:

$$\begin{cases} F_1 = F_1{}^0 + (\dfrac{\partial F_1}{\partial M_V})^0 (M_V - M_V^0) + (\dfrac{\partial F_1}{\partial P_V})^0 (P_V - P_V^0) \\ F_2 = F_2{}^0 + (\dfrac{\partial F_2}{\partial M_V})^0 (M_V - M_V^0) + (\dfrac{\partial F_2}{\partial P_V})^0 (P_V - P_V^0) \\ F_3 = F_3{}^0 + (\dfrac{\partial F_3}{\partial M_V})^0 (M_V - M_V^0) + (\dfrac{\partial F_3}{\partial P_V})^0 (P_V - P_V^0) \\ F_4 = F_4{}^0 + (\dfrac{\partial F_4}{\partial M_V})^0 (M_V - M_V^0) + (\dfrac{\partial F_4}{\partial P_V})^0 (P_V - P_V^0) \end{cases}$$

em que

$$F_1^0 = \ell_1 - R_{E1,E2} + R_{E1,V^0}$$
$$F_2^0 = \ell_2 - R_{E2,V^0} + R_{E2,E1}$$
$$F_3^0 = \ell_3 - R_{E2,E3} + R_{E2,V^0}$$
$$F_4^0 = \ell_4 - R_{E3,V^0} + R_{E3,E2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial M_V} = \frac{P_V - P_{E1}}{(M_V - M_{E1})^2 + (P_V - P_{E1})^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial P_V} = -\frac{M_V - M_{E1}}{(M_V - M_{E1})^2 + (P_V - P_{E1})^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial M_V} = -\frac{P_V - P_{E2}}{(M_V - M_{E2})^2 + (P_V - P_{E2})^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_V} = \frac{M_V - M_{E2}}{(M_V - M_{E2})^2 + (P_V - P_{E2})^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial M_V} = \frac{P_V - P_{E2}}{(M_V - M_{E2})^2 + (P_V - P_{E2})^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial P_V} = -\frac{M_V - M_{E2}}{(M_V - M_{E2})^2 + (P_V - P_{E2})^2}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial M_V} = -\frac{P_V - P_{E3}}{(M_V - M_{E3})^2 + (P_V - P_{E3})^2}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial P_V} = \frac{M_V - M_{E3}}{(M_V - M_{E3})^2 + (P_V - P_{E3})^2}$$

Considerando $M_V^0 = 3048.388$ m e $P_V^0 = 2827.699$ m, tem-se os seguintes valores para os termos de ordem zero e para os coeficientes dos termos de ordem um:

$$F_1^0 = 81º.293889 - a\tan\frac{3300.259-3369.287}{3082.183-2890.836} + a\tan\frac{3048.388-3369.287}{2827.699-2890.836} = 81º.293889 - a\tan\frac{-69.028}{191.347} + a\tan\frac{-320.899}{-63.137} =$$

$$81º.293889 - 340º.163205 + 258º.869207 = -0º.000109 = -1.902409\times10^{-6}\ \text{rad}$$

$$F_2^0 = 64º.541111 - a\tan\frac{3048.388-3300.259}{2827.699-3082.183} + a\tan\frac{3369.287-3300.259}{2890.836-3082.183} = 64º.541111 - a\tan\frac{-251.871}{-254.484} + a\tan\frac{69.028}{-191.347} =$$

$$64º.541111 - 224º.704333 + 160º.163205 = -0º.000017 = -2.967060\times10^{-7}\ \text{rad}$$

$$F_3^0 = 37º.657778 - a\tan\frac{3047.954-3300.259}{3048.344-3082.183} + a\tan\frac{3048.388-3300.259}{2827.699-3082.183} = 37º.657778 - a\tan\frac{-252.305}{-33.839} + a\tan\frac{-251.871}{-254.484} =$$

$$37º.657778 - 262º.361109 + 224º.704333 = 0º.001002 = 1.748820\times10^{-5}\ \text{rad}$$

$$F_4^0 = 97º.525278 - a\tan\frac{3048.388-3047.954}{2827.699-3048.344} + a\tan\frac{3300.259-3047.954}{3082.183-3048.344} = 97º.525278 - a\tan\frac{0.434}{-220.645} + a\tan\frac{252.305}{33.839} =$$

$$97º.525278 - 179º.887302 + 82º.361109 = -0º.000915 = -1.596976\times10^{-5}\ \text{rad}$$

(estes termos independentes passam para o 2º membro das equações de condição, trocando de sinal)

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial M_V}\right)^0 = \frac{2827.699-2890.836}{(3048.388-3369.287)^2+(2827.699-2890.836)^2} = -5.902717\times10^{-4}$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial P_V}\right)^0 = -\frac{3048.388-3369.287}{(3048.388-3369.287)^2+(2827.699-2890.836)^2} = 3.000108\times10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial M_V}\right)^0 = -\frac{2827.699-3082.183}{(3048.388-3300.259)^2+(2827.699-3082.183)^2} = 1.985037\times10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial P_V}\right)^0 = \frac{3048.699-3300.259}{(3048.388-3300.259)^2+(2827.699-3082.183)^2} = -1.964654\times10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial M_V}\right)^0 = \frac{2827.699-3082.183}{(3048.388-3300.259)^2+(2827.699-3082.183)^2} = -1.985037\times10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial P_V}\right)^0 = -\frac{3048.388-3300.259}{(3048.388-3300.259)^2+(2827.699-3082.183)^2} = 1.9646454\times10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_4}{\partial M_V}\right)^0 = -\frac{2827.699-3048.344}{(3048.388-3047.954)^2+(2827.699-3048.344)^2} = 4.532149\times10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_4}{\partial P_V}\right)^0 = \frac{3048.388-3047.954}{(3048.388-3047.954)^2+(2827.699-3048.344)^2} = 8.911228\times10^{-6}$$

Com as aproximações anteriores, as matrizes B e $\vec{f}$ são:

$$B = 10^{-3}\begin{bmatrix} -0.590273 & 3.000109 \\ 1.985037 & -1.964655 \\ -1.985037 & 1.964655 \\ 4.532150 & 0.008915 \end{bmatrix} m^{-1} \quad , \quad \vec{f} = 10^{-5}\begin{bmatrix} -0.190083 \\ -0.029303 \\ 1.748993 \\ -1.597517 \end{bmatrix} rad$$

Sendo $\ell_1 = 81^{o}\,17'\,\,38''$, $\ell_2 = 64^{o}\,32'\,\,28''$, $\ell_3 = 37^{o}\,39'\,\,28''$, $\ell_4 = 97^{o}\,31'\,\,31''$ e sendo d_1 a direcção E1$\rightarrow$V, d_2 a direcção E1$\rightarrow$E2, d_3 a direcção E2$\rightarrow$E1, d_4 a direcção E2$\rightarrow$V, d_5 a direcção E2$\rightarrow$E3, d_6 a direcção E3$\rightarrow$E2 , d_7 a direcção E3$\rightarrow$V, tem-se $\ell_1 = d_2 - d_1$, $\ell_2 = d_4 - d_3$, $\ell_3 = d_5 - d_4$, $\ell_4 = d_7 - d_6$. Na forma matricial, estas relações tomam a forma

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{\ell}_{4,1} = J_{4,7} d_{7,1}.$$

Sendo o desvio padrão associado à observação de uma direcção igual a 2’’, a matriz da variância das direcções igual a $\Sigma_{dd} = 4\, I_{7,7}\,''^2 = (4\pi''/(360\times 60\times 60''))^2 I_{7,7}\ rad^2 = 9.401772\times 10^{-11} I_{7,7}\ rad^2$; pela lei de propagação dos erros, a matriz de covariância associada aos ângulos é dada por

$$\Sigma_{\ell\ell} = J_{4,7}\Sigma_{dd}J^{T}_{7,4} = 9.401772\times 10^{-11}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} rad^2$$

As equações normais são $(B^{T}_{2,4}\Sigma^{-1}_{\ell\ell_{4,4}}B_{4,2})\vec{\Delta}_{2,1} = B^{T}_{2,4}\Sigma^{-1}_{\ell\ell_{4,4}}\vec{f}_{4,1} \Leftrightarrow N_{2,2}\vec{\Delta}_{2,1} = \vec{t}_{2,1} \Rightarrow \vec{\Delta}_{2,1} = N^{-1}_{2,2}\vec{t}_{2,1}$, donde

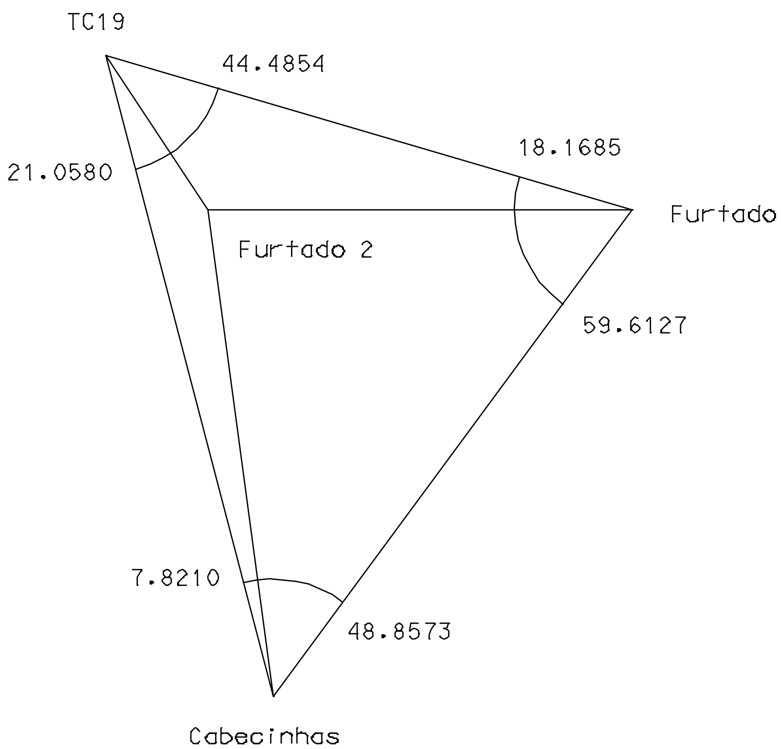
$$\Delta = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3.792248 \\ 0.624771 \end{bmatrix} m$$

Estas correcções são então somadas à aproximação inicial das coordenadas do ponto V, o que dá $M_V^1 = 3048.392$ m e $P_V^1 = 2827.700$ m; em função da tolerância seleccionada *a priori*, repete-se o processo com estas novas aproximações, até se obter, na iteração i, $\left|M_V^i - M_V^{i-1}\right| \leq \text{tolerância}$, $\left|P_V^i - P_V^{i-1}\right| \leq \text{tolerância}$. Admitindo, neste caso, que tolerância = 1 mm, tem-se logo na 2ª iteração que as correcções são inferiores à tolerância:

$$\Delta = 10^{-4}\begin{bmatrix} -2.077621 \\ -3.752259 \end{bmatrix} \text{m}$$

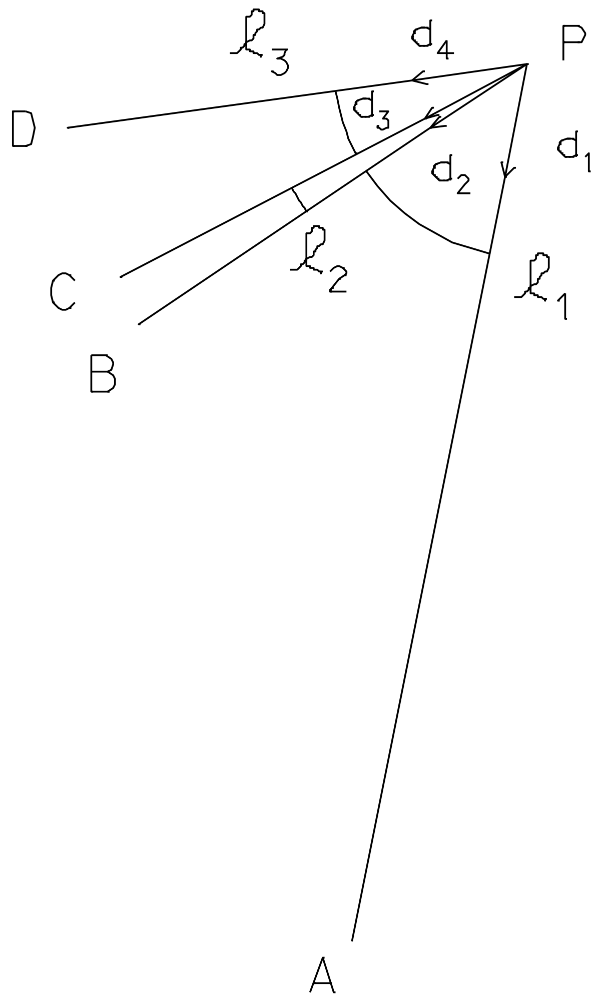
e portanto as coordenadas finais para o ponto V são $M_V^2 = 3048.392$ m e $P_V^2 = 2827.700$ m. A partir destas coordenadas ajustadas, são calculados os resíduos das observações, as observações ajustadas a a precisão associada a cada quantidade estimada.

Exemplo: Calcule, efectuando um ajustamento por mínimos quadrados, as coordenadas do ponto Furtado 2º, sabendo que as coordenadas dos vértices estacionados são: Cabecinhas(15821.182, -14408.496), Furtado(17000.873, -12805.293) e TC19(15268.780, -12297.195). As unidades angulares são grados. A precisão das observações de direcção é igual a 0.0005 grados.



Intersecção inversa

Exemplo: A figura seguinte mostra a disposição do ponto P cujas coordenas se pretende obter por ajustamento de uma intersecção inversa. As observações e as cordenadas dos pontos visados estão indicadas nas tabelas:



Estação	M (m)	P (m)
A	88237.92	80132.03
B	82279.10	97418.58
C	81802.35	98696.21
D	80330.69	102911.40

Ponto visado	Leitura azimutal	Precisão
A	0º 00’ 00’’	5’’
B	44º 55’ 30.5’’	5’’
C	50º 51’ 49.9’’	5’’
D	70º 48’ 08.2’’	5’’

Neste caso $n=3$, $n_0=2$, $r=3-2=1$, $u=2$, $c=r+u=3$, ou seja, devem ser escritas 3 equações de condição relacionando os 3 ângulos observados e os 2 parâmetros desconhecidos (as coordenadas planimétricas do ponto P:

$$\begin{cases} \ell_1+\upsilon_1 = R_{PB}-R_{PA} \\ \ell_2+\upsilon_2 = R_{PC}-R_{PB} \\ \ell_3+\upsilon_3 = R_{PD}-R_{PC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = \ell_1+\upsilon_1 - R_{PB}+R_{PA} = \ell_1+\upsilon_1 - \mathrm{a}\tan\dfrac{M_B-M_P}{P_B-P_P} + \mathrm{a}\tan\dfrac{M_A-M_P}{P_A-P_P} = 0 \\ F_2 = \ell_2+\upsilon_2 - R_{PC}+R_{PB} = \ell_2+\upsilon_2 - \mathrm{a}\tan\dfrac{M_C-M_P}{P_C-P_P} + \mathrm{a}\tan\dfrac{M_B-M_P}{P_B-P_P} = 0 \\ F_3 = \ell_3+\upsilon_3 - R_{PD}+R_{PC} = \ell_3+\upsilon_3 - \mathrm{a}\tan\dfrac{M_D-M_P}{P_D-P_P} + \mathrm{a}\tan\dfrac{M_C-M_P}{P_C-P_P} = 0 \end{cases}$$

Como estas equações são não lineares nos parâmetros, é necessário efectuar uma linearização:

$$\begin{cases} F_1^0 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial M_P}\right)^0 (M_p - M_P^0) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial P_P}\right)^0 (P_P - P_P^0) = 0 \\ F_2^0 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial M_P}\right)^0 (M_p - M_P^0) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_P}\right)^0 (P_P - P_P^0) = 0 \\ F_3^0 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial M_P}\right)^0 (M_p - M_P^0) + \left(\frac{\partial F_3}{\partial P_P}\right)^0 (P_P - P_P^0) = 0 \end{cases}$$

onde

$$F_1^0 = \ell_1 - a\tan\frac{M_B - M_P^0}{P_B - P_P^0} + a\tan\frac{M_A - M_P^0}{P_A - P_P^0}$$

$$F_2^0 = \ell_2 - a\tan\frac{M_C - M_P^0}{P_C - P_P^0} + a\tan\frac{M_B - M_P^0}{P_B - P_P^0}$$

$$F_3^0 = \ell_3 - a\tan\frac{M_D - M_P^0}{P_D - P_P^0} + a\tan\frac{M_C - M_P^0}{P_C - P_P^0}$$

e

$$\frac{\partial F_1}{\partial M_p} = \frac{P_B - P_P}{(M_B - M_P)^2 + (P_B - P_P)^2} - \frac{P_A - P_P}{(M_A - M_P)^2 + (P_A - P_P)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial P_p} = -\frac{M_B - M_P}{(M_B - M_P)^2 + (P_B - P_P)^2} + \frac{M_A - M_P}{(M_A - M_P)^2 + (P_A - P_P)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial M_p} = \frac{P_C - P_P}{(M_C - M_P)^2 + (P_C - P_P)^2} - \frac{P_B - P_P}{(M_B - M_P)^2 + (P_B - P_P)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_p} = -\frac{M_C - M_P}{(M_C - M_P)^2 + (P_C - P_P)^2} + \frac{M_B - M_P}{(M_B - M_P)^2 + (P_B - P_P)^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial M_p} = \frac{P_D - P_P}{(M_D - M_P)^2 + (P_D - P_P)^2} - \frac{P_C - P_P}{(M_C - M_P)^2 + (P_C - P_P)^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial P_p} = -\frac{M_D - M_P}{(M_D - M_P)^2 + (P_D - P_P)^2} + \frac{M_C - M_P}{(M_C - M_P)^2 + (P_C - P_P)^2}$$

O valor inicial para as coordenadas do ponto P pode ser obtido resolvendo a intersecção inversa com apenas dois ângulos: considerem-se para o efeito os pontos A, B e D que, para se utilizarem as expressões de cálculo das coordenadas do ponto P se estabelece a equivalência: A=A, M=B, B=D. Assim:

$$T_M = \frac{(102911.40-80132.03)+(82279.10-88237.92)\cot g(44^o.925139)+(82279.10-80330.69)\cot g(25^o.877139)}{(88237.92-80330.69)+(97418.58-80132.03)\cot g(44^o.925139)+(97418.58-102911.40)\cot g(25^o.877139)}$$

$$=1.496290$$

$$T_A = \frac{1.496290-\mathrm{tg}(44^o.925139)}{1+1.496290\times\mathrm{tg}(44^o.925139)} = 0.200170$$

$$T_B = \frac{1.496290+\mathrm{tg}(25^o.877139}{1-1.496290\times\mathrm{tg}(25^o.877139)} = 7.226579$$

$$P_P = \frac{82279.10-88237.92-97418.58\times1.496290+80132.03\times0.200170}{0.200170-1.496290} = 104685.707\ \mathrm{m}$$

$$M_P = 88237.92-(80132.03-104685.707)\times0.200170 = 93152.830\ \mathrm{m}$$

Tem-se então:

$$F_1^0 = 44^o.925139 - \mathrm{a\ tan}\frac{-10873.73}{-7267.127} + \mathrm{a\ tan}\frac{-4914.91}{-24553.677} = 44^o.925139 - 236^o.244416 + 191^o.319299 = 3.839724\times10^{-7}\ \mathrm{rad}$$

$$F_2^0 = 5^o.938722 - \mathrm{a\ tan}\frac{-11350.48}{-5989.497} + \mathrm{a\ tan}\frac{-10873.73}{-7267.127} = 5^o.938722 - 242^o.179987 + 236^o.244416 = 5.499532\times10^{-5}\ \mathrm{rad}$$

$$F_3^0 = 19^o.938417 - \mathrm{a\ tan}\frac{-12822.14}{-1774.307} + \mathrm{a\ tan}\frac{-11350.48}{-5989.497} = 19^o.938417 - 262^o.121536 + 242^o.179987 = -5.466371\times10^{-5}\ \mathrm{rad}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial M_P^0} = -3.856985\times10^{-4}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial P_P^0} = 5.631723\times10^{-5}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial M_P^0} = -2.326740\times10^{-5}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_P^0} = 4.931597\times10^{-5}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial M_P^0} = 2.577506\times10^{-5}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial P_P^0} = 7.611914\times10^{-6}$$

$$\vec{f} = 10^{-5}\begin{bmatrix} 0.038397 \\ 5.499532 \\ -5.466371 \end{bmatrix} \text{rad}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3.856985 & 0.563172 \\ -0.232674 & 0.493159 \\ 0.257750 & 0.076119 \end{bmatrix} \text{m}^{-1}$$

Sendo a relação entre as direcções observadas e os ângulos correspondentes dada por $\ell_1 = d_{PB} - d_{PA}$, $\ell_2 = d_{PC} - d_{PB}$, $\ell_3 = d_{PD} - \ell_{PC}$ tem-se, na forma matricial, $\vec{\ell} = J\vec{d}$ ou

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Como o desvio padrão de cada direcção é igual a 5'', a respectiva variância é igual a 25 $''^2$ que, traduzido para radianos, dá $5.876107\text{x}10^{-10}$ rad^2, de tal forma que a matriz de variâncias-covariâncias das direcções observadas é $\Sigma_{dd} = 5.876107 \times 10^{-10}\, I$. Pode então escrever-se

$$\Sigma_{\ell\ell} = J\Sigma_{dd}J^T = 5.876107 \times 10^{-10} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O sistema de equações normais tem a forma $N\vec{\Delta} = \vec{t}$, com $N = B^T\Sigma_{\ell\ell}^{-1}B$ e $\vec{t} = B^T\Sigma_{\ell\ell}^{-1}\vec{f}$, cuja solução é $\vec{\Delta} = N^{-1}\vec{t}$; fixada a tolerância para a diferença entre iterações sucessivas dos valores dos parâmetros, o processo converge rapidamente pois a aproximação inicial é muito próxima do valor final das coordenadas do ponto P.